جامعة قسنطينة
قسم الفيزياء

مقياس فيزياء-2 (LMD)
السنة الجامعية 2007/2006

السلسلة رقم 01 : التحليل الرياضي

- التمرين 01 : نعرف الحقل السلمي بالعلاقة : $V(x,y) = x^2 + y^2/4$

1- أرسم سطوح تساوي الكمون

2- عين الحقل الشعاعي $\vec{E}(x,y)$ الناتج عن هذا الكمون، ثم أرسم خطوط هذا الحقل

3- أحسب عبارة $\overrightarrow{Rot}(\vec{E})$ ، ماذا تلاحظ ؟

- التمرين 02 : ليكن الحقل السلمي : $V(x,y,z) = 5.x.y.z + 3.x^2.y^2.z^2$

1- أحسب الحقل الشعاعي : $\vec{E} = \overrightarrow{grad}(V)$

2- أحسب عبارة $\overrightarrow{Rot}(\vec{E})$ ، ماذا تلاحظ ؟

3- أحسب قيمة $\vec{E}(x,y,z)$ من أجل النقطتين $M_1(1,2,1)$ و $M_2(1,-1,5/6)$

- التمرين 03 : لتكن النقطة $M(x,y,z)$ و شعاع الموقع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ، أحسب :

1- $\overrightarrow{grad}(\|\vec{r}\|)$

2- $\overrightarrow{grad}(1/\|\vec{r}\|)$

3- $\overrightarrow{grad}(Log\|\vec{r}\|)$

- التمرين 04 : بشكل عام نقول عن الحقل السلمي $V(x,y,z)$ أنه يملك تناظرا كرويا ، إذا كان هذا الحقل دالة لطويلة $\|\vec{r}\|$: $V(\|\vec{r}\|)$ ، بين أن الحقل الشعاعي $\overrightarrow{grad}(V(\|\vec{r}\|))$ يكون محمولا بشعاع الواحدة القطري $\vec{U_r}$

- التمرين 05 : ليكن السطح المعرف بالمعادلة $5x^2 + 2y^3 + z^2 = A$ حيث A ثابت موجب، أستخرج مركبات شعاع الواحدة الناظمي لهذا السطح عند النقطة $M_1(1,2,1)$ (أستعمل علاقة التدرج). أعد نفس الشيء من أجل النقطة $M_2(1,-1,5/6)$

- التمرين 06 : أحسب عبارة التباعد من أجل الحقول الشعاعية :

1- $\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ ، $\vec{U_r} = \vec{r}/r$

2- أعد حساب السؤال الثاني باستعمال العلاقة : $Div(f.\vec{a}) = \vec{a}.\overrightarrow{grad}(f) + f.Div(\vec{a})$

3- أحسب عبارة كل من : $\Delta(r)$ و $\Delta(r^2)$ و $\Delta(1/r)$: ($Div(\overrightarrow{grad})$)

- التمرين 07 : أحسب تباعد الحقل الشعاعي : $\vec{E} = K.\vec{r}/r^3$ حيث K ثابت ، ماذا نسمي هذا النوع من الحقول .

أحسب كذلك :

- $\overrightarrow{Rot}(\vec{r})$ ، $\overrightarrow{Rot}(\vec{r}/r)$

- $\overrightarrow{Rot}(\vec{A})$ حيث أن : $\vec{A} = xy^2.\vec{i} - 3.yzx^2.\vec{j} + 2.x^2z.\vec{k}$ ، عين القيمة عند النقطة $M_1(1,2,1)$

- حدد مجموعة النقاط التي يكون فيها $\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{0}$

السلسلة رقم 01 : التحليل الرياضي

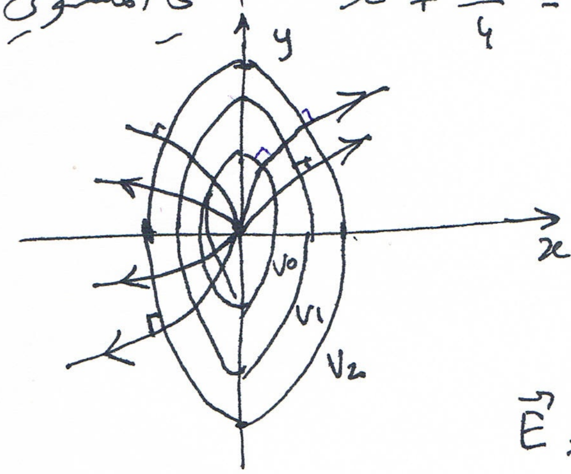
التمرين 01 :

$V = x^2 + \frac{y^2}{4}$ ، $\forall z$

1 - سطوح تساوي الكمون هي عبارة عن مجسمات قطع ناقص:

$a=1$ ، $b=2$ ، $x^2 + \frac{y^2}{4} = ct$ ، في المستوي oxy

يكون شكلها :



2 - لدينا $\vec{E} = \vec{grad}\, V$

$$\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} = 2x\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j}$$

خطوط الحقل تكون عمودية على سطوح تساوي الكمون

3) -

$$\vec{Rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & \frac{y}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \frac{y}{2}}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial 2x}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial \frac{y}{2}}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\vec{Rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ ، $\vec{E}$: مشتق من كمون

التمرين 02 :

$$V = 5xyz + 3x^2y^2z^2$$

1 -

$$\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= (5yz + 6xy^2z^2)\vec{i} + (5xz + 6x^2yz^2)\vec{j} + (5xy + 6x^2y^2z)\vec{k}$$

2 -

$$\vec{Rot}\,\vec{E}_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = (5x + 12x^2yz) - (5x + 12x^2yz) = 0$$

نفس الشيء بالنسبة لـ y و z

الحقل مشتق من كمون فهو حقل محافظ

لأن $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}) \equiv \vec{0}$

-3 $\vec{E}(M_1) = 34\vec{i} + 17\vec{j} + 34\vec{i}$ ، $\vec{E}(M_2) = \vec{0}$

- التمرين 03 :- $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + 3\vec{k}$ ، $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+3^2}$

-1 $$\overrightarrow{grad}\|\vec{r}\| = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{3}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{u}_r$$

-2 $$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{\|r\|}\right) = \frac{d\frac{1}{r}}{dr}\cdot\overrightarrow{grad}\, r = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

-3 $$\overrightarrow{grad}(\log r) = \frac{d\log r}{dr}\cdot\overrightarrow{grad}\, r = \frac{1}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

- التمرين 04 :- يمكن في هذه الحالة كتابة :

$$\overrightarrow{grad}(V(r)) = \frac{dV}{dr}\cdot\overrightarrow{grad}\, r = \frac{dV}{dr}\cdot\vec{u}_r$$

- التمرين 05 :- من أجل أي سطح : $S = A$ فإن لدينا دائما

$S \perp \overrightarrow{grad}\, S$ ومنه فشعاع الواحدة الناظمي يكتب

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{grad}\, S}{\|\overrightarrow{grad}\, S\|}$$

$$\overrightarrow{grad}\, S = 10x\vec{i} + 6y^2\vec{j} + 23\vec{k}$$

إذا : $\vec{n}(M_1) = \frac{10}{\sqrt{680}}\vec{i} + \frac{24}{\sqrt{680}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{680}}\vec{k}$ ، $\vec{n}(M_2) = \frac{3}{\sqrt{1249}}\left[10\vec{i} + 6\vec{j} + \frac{5}{3}\vec{k}\right]$

- التمرين 06 :- $Div\,\vec{r} = 1+1+1 = 3$

$$Div\,\vec{u}_r = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{3}{r}\right]$$

$$= \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\cdot Div\,\vec{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$$

(3)

$$\Delta r = Div(\vec{grad}\, r) = Div\frac{\vec r}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\Delta r^2 = Div(\vec{grad}\, r^2) = Div\left(\frac{dr^2}{dr}\vec{grad}\, r\right)$$

$$= Div\left[2r.\frac{\vec r}{r}\right] = Div\, 2\vec r = 6$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = Div\left[\vec{grad}\frac{1}{r}\right] = Div\left[-\frac{1}{r^2}\vec{grad}\, r\right] = Div\left[-\frac{\vec r}{r^3}\right]$$

$$= -\left[\vec r.\vec{grad}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}Div\,\vec r\right]$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\left[\vec r.\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\vec r}{r}\right) + \frac{1}{r^3}.3\right] = -\left[-3\frac{r^2}{r^5} + \frac{3}{r^3}\right] = 0$$

- التمرين 07 :-

$$Div\frac{K}{r^3}.\vec r = \vec r.\vec{grad}\frac{K}{r^3} + \frac{K}{r^3}.Div\,\vec r$$

$$= \vec r.\left[K.\frac{-3}{r^4}\frac{\vec r}{r}\right] + \frac{K}{r^3}.3 = -\frac{3K}{r^3} + \frac{3K}{r^3} = 0$$

حقل محافظ من الشكل: $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ مشتق من كمون سلمي ($\vec E = \vec{Rot}\,\vec A$)

- : $\vec{Rot}\,\vec r$:

$$\vec{Rot}\,\vec r = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0-0)\vec i + (0-0)\vec j + (0-0)\vec k = \vec 0$$

$$\vec{Rot}\,\frac{\vec r}{r} = \vec 0 \Leftarrow \frac{\vec r}{r} = \vec{u_r}\ ,\ \vec{u_r} = \vec{grad}\, r$$ -

$$\vec{Rot}\,\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -3yzx^2 & 2x^2z \end{vmatrix} = \vec i\left(+3yx^2\right) - \vec j\left(4xz - 0\right) + \vec k\left(-6xyz - 2xy\right)$$

$$= 3yx^2\,\vec i - 4xz\,\vec j - (2xy + 6xyz)\,\vec k$$

4

عند النقطة (M_1) :

$$\vec{Rot}\vec{A} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 16\vec{k}$$

$$\vec{Rot}\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3yx^2 = 0 \\ -4xz = 0 \\ 2xy + 6xyz = 0 \end{cases}$$

هناك عدة حالات :

1) $x=0$ ، المستوي (oyz)

2) $x=0$ و $y=0$ المحور oz

3) $y=0$ ، $z=0$ المحور ox

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

مجموع النقاط هي المستوي (oyz) + المحور (ox)

حل سلسلة التحليل الشعاعي :-

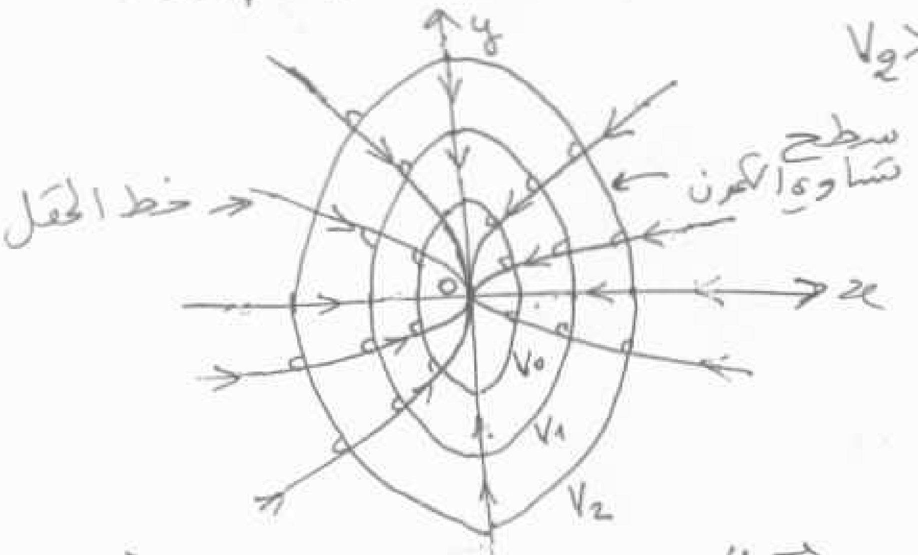
- التمرين 01 :- من المفروض أن يكون $V(x,y,z)$ ، لكن يمكن أن نأخذ $V(x,y)$ حتى نستطيع رسم سطوح (خطوط) تساوي الكمون

1- سطوح تساوي الكمون :

$$V(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=V_0=ct$$

هي قطع ناقص حيث: $a=\sqrt{8V_0}=2\sqrt{2V_0}$ ، $b=\sqrt{18V_0}=3\sqrt{2V_0}$

مع $V_2>V_1>V_0$



خطوط الحقل تكون عمودية على سطوح تساوي الكمون موجهة نحو تناقص V

2- عبارة الحقل :

$$\vec{E}=-\vec{grad}\,V(x,y)=-\frac{x}{4}\vec{i}-\frac{y}{9}\vec{j}$$

3- الحقل الشعاعي له مركبتان فقط لذلك :

$$\vec{Rot}\,\vec{E}(x,y)=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

- التمرين 02 :- 1)

$$\vec{E}=-\vec{grad}\,V=(18x+4y^2)\vec{i}+(8xy-3z^3)\vec{j}-(9yz^2+1)\vec{k}$$

2)

$$\vec{Rot}\,\vec{E}=(-9z^2+9z^2)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(8y-8y)\vec{k}=\vec{0}$$

لأن الحقل محافظ (مشتق من كمون)

3)

$$\vec{E}(M_1)=(52)\vec{i}+(29)\vec{j}-(17)\vec{k} \quad ، \quad \vec{E}(M_2)=7\vec{i}-\frac{221}{72}\vec{j}+\frac{29}{4}\vec{k}$$

- التمرين 03 :-

$$\vec{r}=\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \quad ، \quad \|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1)

$$\vec{grad}\|\vec{r}\|=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}) \Rightarrow \vec{grad}\|\vec{r}\|=\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}=\vec{u_r}$$

② $\overrightarrow{grad}\frac{1}{\|\vec r\|} = -\frac{\vec r}{\|\vec r\|^3} = -\frac{\vec U_r}{\|\vec r\|^2} \Leftarrow \overrightarrow{grad}\frac{1}{\|\vec r\|} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\left(2x\vec i + 2y\vec j + 2z\vec k\right)$ -(2

$\overrightarrow{grad}(\log\|\vec r\|) = \frac{\vec U_r}{\|\vec r\|} \Leftarrow \overrightarrow{grad}(\log\|\vec r\|) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\|\vec r\|}(2\vec r)\right]$ -(3

في الحالة العامة نجد : $\overrightarrow{grad}(f(\|\vec r\|)) = \frac{df}{d\|\vec r\|}\cdot\overrightarrow{grad}\|\vec r\| = \frac{df}{d\|\vec r\|}\cdot\vec U_r$

-التمرين 04 :- نتيجة السؤال الثالث للتمرين السابق نجد

أي له نفس حامل $\vec U_r$: $\overrightarrow{grad}[V(\|\vec r\|)] = \frac{dV}{d\|\vec r\|}\cdot\vec U_r$

-التمرين 05 :- الشعاع الناظم للسطح S في النقطة M معرف

بالعلاقة : $\vec n = \frac{\overrightarrow{grad}[V(M)]}{\|\overrightarrow{grad}[V(M)]\|}$ مع $V(M) = 4x^2+5y^2-4z^3$

$\vec n(M_1) = \frac{-16\vec i + 30\vec j + 48\vec k}{\sqrt{3460}} \Leftarrow \overrightarrow{grad}[V(M)] = 8x\vec i + 10y\vec j - 12z\vec k$

في M_2 نجد كذلك $\vec n(M_2) = \frac{48\vec i - 10\vec j - 60\vec k}{\sqrt{6004}}$

-التمرين 06 :- (1 $Div\vec A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2+3-1 = 4$

$$Div\left[5\frac{\vec r}{\|\vec r\|}\right] = 5\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\|\vec r\|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\|\vec r\|}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\|\vec r\|}\right)\right]$$

نجد أن : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\|\vec r\|}\right) = \frac{1}{\|\vec r\|} - \frac{x^2}{\|\vec r\|^3}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\|\vec r\|}\right) = \frac{1}{\|\vec r\|} - \frac{y^2}{\|\vec r\|^3}$ ، $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\|\vec r\|}\right) = \frac{1}{\|\vec r\|} - \frac{z^2}{\|\vec r\|^3}$

و $Div\left(5\frac{\vec r}{\|\vec r\|}\right) = 5\left[\frac{3}{\|\vec r\|} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\|\vec r\|^3}\right] = 5\left[\frac{3}{\|\vec r\|} - \frac{1}{\|\vec r\|}\right] = \frac{10}{\|\vec r\|}$

-(2

$$Div\left[\frac{5}{\|\vec r\|}\cdot\vec r\right] = \vec r\cdot\overrightarrow{grad}\left(\frac{5}{\|\vec r\|}\right) + \frac{5}{\|\vec r\|}\cdot Div(\vec r)$$

وحسب التمرين (3) نجد : $= \vec r\cdot\left(-\frac{5}{\|\vec r\|^2}\vec U_r\right) + \frac{5}{\|\vec r\|}Div\vec r$

مع $Div\vec r = 3 \Rightarrow$ $Div\left[5\frac{\vec r}{\|\vec r\|}\right] = -\frac{5}{\|\vec r\|} + \frac{5\times 3}{\|\vec r\|} = \frac{10}{\|\vec r\|}$

(3) $\Delta = Div(\vec{grad})$ 3)- حساب مؤثر لابلاس :

وحسب السؤال (01)

* $\Delta r = Div[\vec{grad}\, r] = Div[\vec{u}_r] = \frac{2}{\|\vec{r}\|}$

* $\Delta(r^2) = Div[\vec{grad}\, r^2] = Div[\vec{grad}\, f(r)] = Div\left[\frac{df}{dr}\vec{grad}\, r\right]$

$= Div[2r.\vec{grad}\, r] = Div[2r.\vec{u}_r] = 2\,Div\,\vec{r} = 2\times 3 = 6$

* $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = Div\left[\vec{grad}\,\frac{1}{r}\right] = Div\left[-\frac{1}{r^2}.\vec{u}_r\right] = -Div\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$

$= -\left[\vec{r}.\vec{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}.Div\,\vec{r}\right] = -\left[\frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3}\right] = 0$

- التمرين 07 : -

$Div\left[\frac{K}{r^3}.\vec{r}\right] = \vec{r}.\vec{grad}\,\frac{K}{r^3} + \frac{K}{r^3}.Div\,\vec{r}$

حسب التمرين (06)

$= -3K.\frac{1}{r^3} + 3\frac{K}{r^3} = 0$

- $\vec{Rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{Rot}\left[\vec{grad}(\vec{r})\right] \equiv \vec{0}$ ، $\vec{Rot}\,\vec{r} = \vec{0}$

$\vec{Rot}\,\vec{A} = 3x^2z^2[1-5y^3]\vec{i} - 6xyz^2\vec{j} + 2xy[5y^2z^3 - 2x^2]\vec{k}$ -

عند $M_1(2,3,-1)$: $\vec{Rot} = -1474\vec{i} - 36\vec{j} - 636\vec{k}$

- يكون $\vec{Rot}\vec{A} = \vec{0}$ إذا تحقق في نفس الوقت ما يلي :

$3x^2z^2[1-5y^3] = 0$ ، $-6xyz^2 = 0$ ، $2xy[5y^2z^3 - 2x^2] = 0$

الحل الوحيد المشترك بينها هو $x=0$ أي المستوي (oyz)

جامعة قسنطينة
قسم الفيزياء

مقياس(M.P (LMD
السنة الجامعية 2009/2008

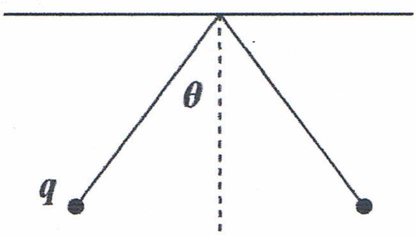
السلسلة رقم 02 : التكهرب و قانون كولون

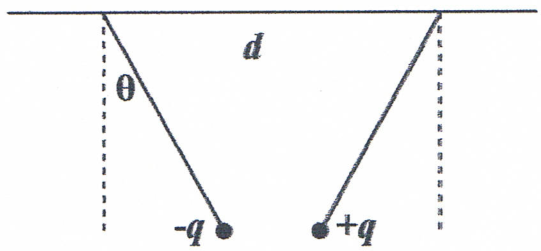
- التمرين 01 :(المنزل) كرتان من الفلين متماثلتان لهما نفس الكتلة **m** و تحملان شحنتين متناظرتين $+q$ و$-q$، الأولى معلقة بخيط على ارتفاع H و الثانية موضوعة علي سطح الأرض وفق امتداد الخيط. أحسب أكبر ارتفاع h عن الأرض يمكن أن تصل إليه الكرة الثانية.

ت.ع: $q = 1.10^{-6}\ C$ ، $m = 30\ g$ ، $K = 9.10^{+9}\ U.I$ و $g = 9.81\ U.I$

- التمرين 02 : كرتان من الفلين متماثلتان لهما نفس الكتلة m و تحملان نفس الشحنة q ، مثبتتان بواسطة خيطين طولهما L و معلقتان من نفس النقطة. أوجد الزاوية θ التي يصنعها الخيطان مع الشاقول في حالة التوازن، ماذا يحدث في حالة الكتلتين مختلفتين m و m'

- أعد السؤال في حالة شحنتين متناظرتين و الخيطان مثبتان بنقطتين تبعدان بالمسافة d .

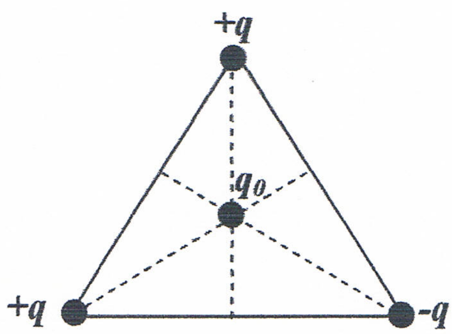




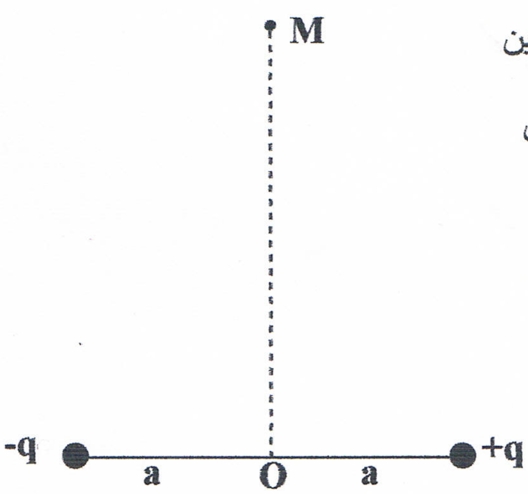
- التمرين 03 : (المنزل) أحسب القوة الكهربائية التنافرية بين بروتونين داخل جزيء هيدروجين ، مع العلم أن المسافة بينهما هي $d = 0.74x10^{-10}\ m$ ، قارن هذه القوة مع قوة التجاذب الكتلية، ثابت الجاذبية.

$G = 6.67x10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2}$

- التمرين 04 : مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a ،
نضع عند رؤوسه ثلاث شحنات $+q$ ، $+q$ و $-q$
- أحسب القوة الكهربائية المؤثرة في كل شحنة و حدد اتجاهها،
أستنتج قيمة الحقل الكهربائي الموافق.
- نضع في مركز المثلث شحنة q_0 ، أوجد القوة الكهربائية المؤثرة فيها، و قيمة الحقل الكهربائي
نعيد الحساب في حالة إحدى الشحنة السالبة تساوي $-2q$.

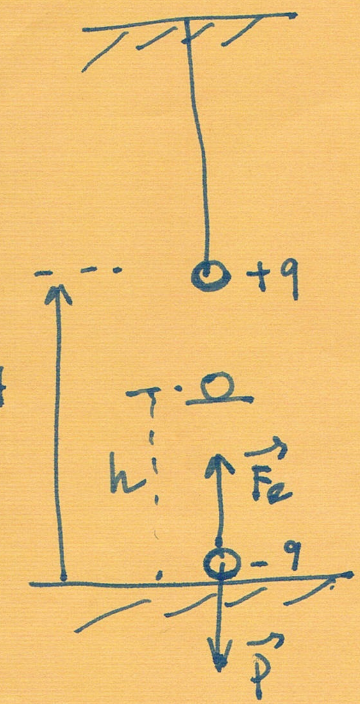


- التمرين 05 : (المنزل) أحسب الحقل و الكمون الكهروساكنين الناتجين عن ثنائي أقطاب مركزه O ، عند النقطة M تقع على محوره و تبعد بالمسافة d عن النقطة O، المسافة بين الشحنتين هي $2a$.
أعد الحساب في حالة النقطة M تقع على امتداد الشحنتين و نفس المسافة d.



- التمرين 01: توجد قوتان، الثقل نحو الأسفل، والقوة الكهربائية نحو الأعلى وهي تتغير من الشكل $\vec{F_e} = K\frac{q\times(-q)}{r^2}$

هناك حالتان:



* قوة الثقل أكبر من القوة الكهربائية، وبالتالي تبقى الكرة في وضعها السابق
* القوة الكهربائية أكبر من قوة الثقل، فتتحرك الكرة نحو الأعلى، فيتناقص r وتزداد القوة الكهربائية باستمرار، حتى تلتصق بالكرة الأولى

تجب أن نأخذ الحالة التي تتساوي فيها القوتان لأجل ذلك يمكن أن نتصور وجود مصعد ينقل الكرة ببطأ من أسفل إلى أعلى. وحينها نلاحظ أن الثقل يبقى ثابتاً، في حين تتزايد القوة $\vec{F_e}$، ونتوقف عندما تحدث المساواة، ويكون ذلك هو أعلى إرتفاع تصله الكرة وهي مستقرة ونكون $h = H - r_e$ حيث r_e هي المسافة بين الكرتين

نكتب

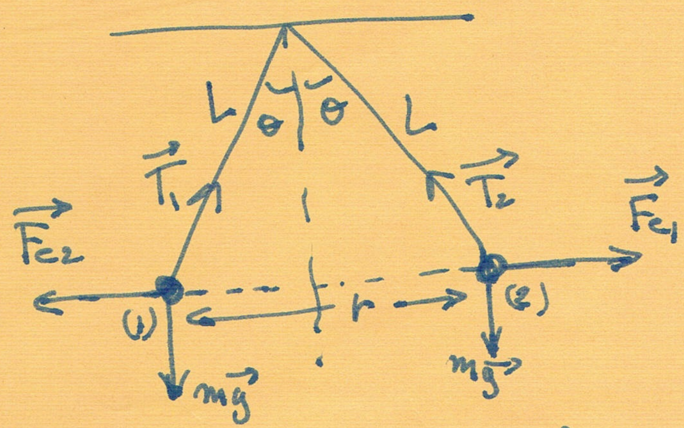
$$\Leftarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\times(-q)}{r_e^2}+mg=0 \Leftarrow \vec{F_e}+\vec{P}=\vec{0}$$

$$\boxed{h = H - q\sqrt{\frac{K}{mg}}} \Leftarrow r_e = q\sqrt{\frac{K}{mg}} \Leftarrow r_e^2 = K\frac{q^2}{mg}$$

$$h = H - 10^{-6}\sqrt{\frac{9\,10^{9}}{30\cdot 9{,}81\cdot 10^{-3}}}$$

$$h = H - \sqrt{\frac{3}{98{,}1}} \Leftarrow h = H - 10^{-6}\sqrt{\frac{3\,10^{12}}{98{,}1}}$$

- التمرين 02 :



نتيجة التنافر، تتباعد الكرتان الشيء الذي يؤدي إلى ميل الخيط بزاوية θ، نتيجة التناظر نجد أن الحالة متناظرة للكرتين يكفي أن نحسب حالة واحدة فقط: نأخذ الكرة (1)، قانون نيوتن يكتب: $m\vec{g} + \vec{F_{e2}} + \vec{T_2} = \vec{0}$ ، بالإسقاط نجد

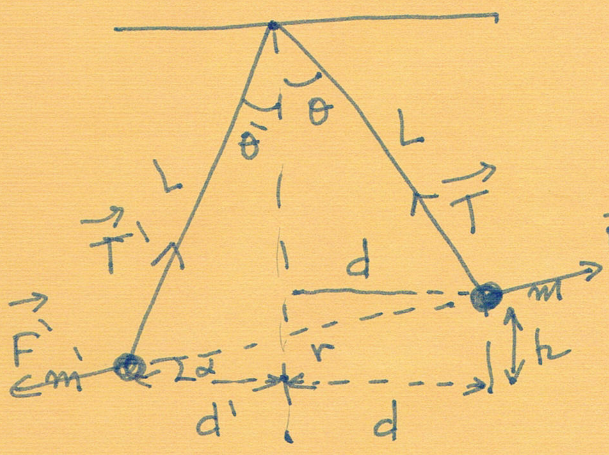
$T_1 \cos\theta = mg$ ، $F_{e2} = T_1 \sin\theta$ بالقسمة نجد

$tg\theta = \dfrac{F_{e2}}{mg}$ ، $F_{e2} = K \dfrac{q^2}{r^2}$

مع $\dfrac{r}{2} = L\sin\theta$ ، بالتعويض نجد :

$$tg\theta = \frac{K\frac{q^2}{r^2}}{mg} = \frac{Kq^2}{mg.4L^2\sin^2\theta} \Rightarrow tg\theta.\sin^2\theta = \frac{Kq^2}{4mgL^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = \frac{Kq^2}{4mgL^2}$$



في حالة الكتلتين $m \neq m'$ ، لا نحصل على حالة التناظر السابقة .
الكتلة الأقل هي التي تنحرف أكثر
نلاحظ أن الكتلتين لا تقعان على نفس المستوى الأفقي بحيث

$$r^2 = h^2 + (d+d')^2 .$$

مع

$$d' = L\sin\theta' \quad \text{و} \quad d = L\sin\theta .$$

القوة $\vec{F'} = -\vec{F}$ غير أفقية وتصنع زاوية α مع المستوى الأفقي
معادلة التوازن تعطي المعادلتين :

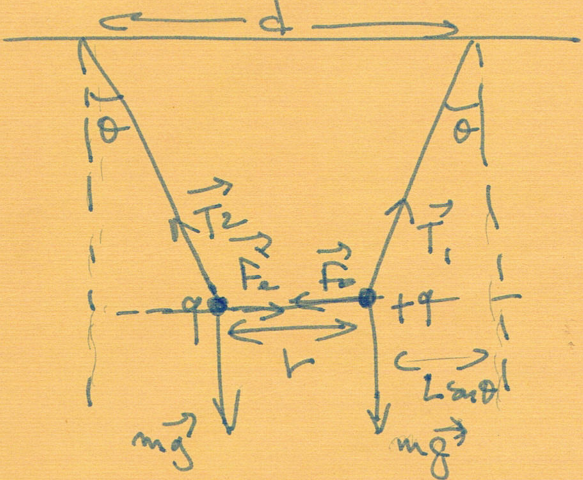
$$\vec{T'} + m'\vec{g} + \vec{F'} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{T}\begin{cases} -T\sin\theta \\ T\cos\theta \end{cases} , \quad \vec{g}\begin{cases} 0 \\ -g \end{cases} , \quad \vec{F}\begin{cases} F\cos\alpha \\ F\sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{T'}\begin{cases} T'\sin\theta' \\ T'\cos\theta' \end{cases} , \quad \vec{F'}\begin{cases} -F\cos\alpha \\ -F\sin\alpha \end{cases}$$

الحساب صعب
عدد المجاهيل :
$\theta' , \theta , \alpha , r$
T' , T

لدينا 6 معادلات من أجل 6 مجاهيل ، يكفي أن نحصل على θ و θ' كإجابة على السؤال



نفس الحسابات للحالة الأولى، فقط المسافة بين الشحنتين هي :

$$r = d - 2L\sin\theta$$

معادلة التوازن تعطي :

$\vec{F_1} + \vec{T_1} + m\vec{g} = 0$ بالإسقاط نحصل على

$F_1 = T_1\sin\theta$ ، $mg = T_1\cos\theta$ بالقسمة نجد $\frac{F_1}{mg} = \tan\theta$

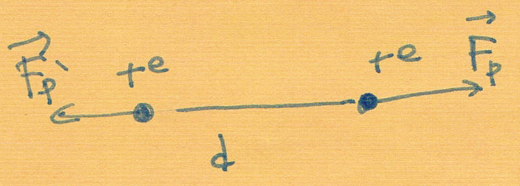
حيث $F_1 = K\frac{q^2}{r^2} \Leftarrow$ نعوض $F_1 = K\frac{q^2}{(d-2L\sin\theta)^2}$

$$\boxed{\frac{\sin\theta\,(d-2L\sin\theta)^2}{\cos\theta} = \frac{Kq^2}{mg}} \Leftarrow \tan\theta = \frac{Kq^2}{mg\,(d-2L\sin\theta)^2}$$

مع العلم أن $r > 0$ دائماً (المسافة بين الشحنتين)

- التمرين 03 : -

$m_p = 1,67.10^{-27}$ Kg



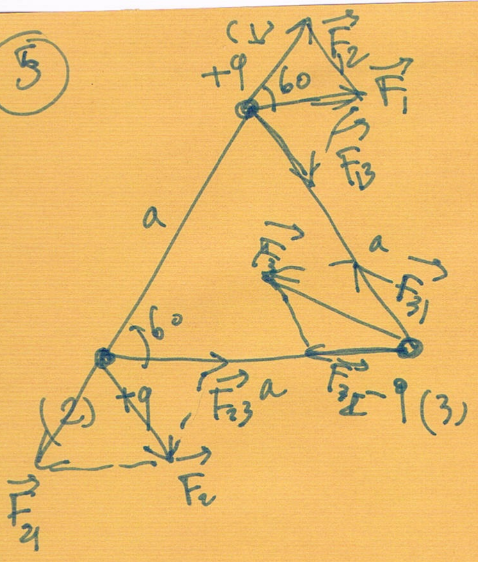
$$F_p = K\frac{e^2}{d^2} = 9.10^{+9}\frac{(1,6)^2.10^{-38}}{(0,74)^2.10^{-20}}$$

$$F_p = \frac{9\times(1,6)^2}{(0,74)^2}.10^{-9}\ N \simeq 42.10^{-9}\ N$$

$$F_m = G\frac{(m_p)^2}{d^2}$$

$$= 6,67.10^{-11}\frac{(1,67)^2.10^{-54}}{(0,74)^2\,10^{-20}}$$

$$\simeq 34.10^{-45}\ N$$



- التمرين 04 :-

* الشحنة (1) :

$$\vec F_1 = \vec F_{12} + \vec F_{13}$$

$\vec F_{12}$ و $\vec F_{13}$ متناظرتان بالنسبة المحور الأفقي الذي يمر من (1) وبالتالي القوة $\vec F_1$ أفقية نحو اليمين :

$$\|\vec F_1\| = 2\|\vec F_{12}\|.\cos 60$$

$$= \|\vec F_{12}\|$$

$$\|\vec F_{12}\| = K\frac{q^2}{a^2}$$

* الشحنة (2) : $\vec F_2 = \vec F_{21} + \vec F_{23}$ ، $\vec F_{23}$ و $\vec F_{21}$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الموازي للضلع (13) والمار من (2) ، نجد أن

$$\|\vec F_2\| = 2\|\vec F_{21}\|\cos 60 = \|\vec F_{21}\| = K\frac{q^2}{a^2}$$

* الشحنة (3) : $\vec F_3 = \vec F_{31} + \vec F_{32}$ ، $\vec F_{32}$ ، $\vec F_{31}$ متناظرتان بالنسبة لمنصف الزاوية (3) ، نجد أن :

$$\|\vec F_3\| = 2\|\vec F_{31}\|.\cos 30$$

$$= \|\vec F_{31}\|\sqrt3$$

$$= K\frac{q^2}{a^2}\sqrt3$$

$$\|\vec F_{31}\| = K\frac{q^2}{a^2}$$

وبكون الحقل الكهربائي متناسب مع القوة

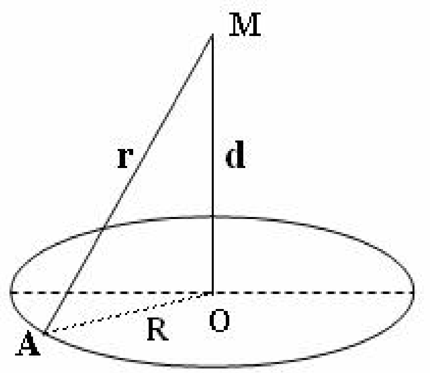
$\|\vec E_1\| = \frac{\|\vec F_1\|}{q} = K\frac{q}{a^2}$ من نفس إتجاه $\vec F_1$ وكذلك بالنسبة لـ $\|\vec E_2\|$

في حين حالة $\|\vec E_3\|$ يكون عكس $\|\vec F_3\|$ ويساوي $\|\vec E_3\| = K\frac{q}{a^2}\sqrt3$

M.P (LMD)مقياس — جامعة قسنطينة

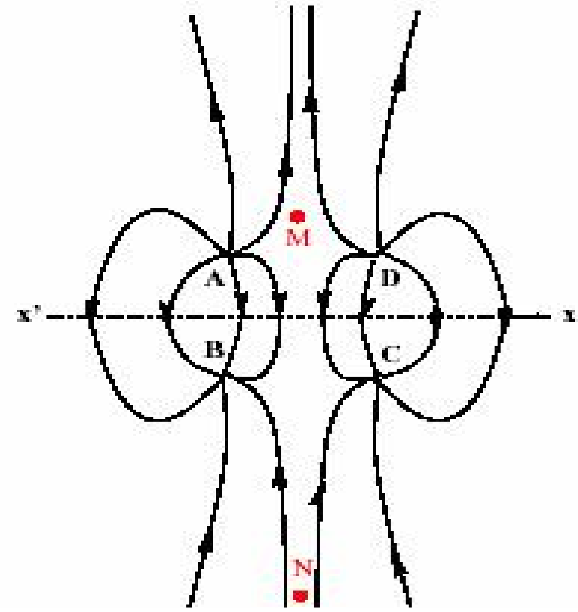
السنة الجامعية 2011/2010 — قسم الفيزياء

السلسلة رقم ٠٣ : الحقل و الكمون الكهرساكنين



- التمرين 01:- أحسب الحقل و الكمون الكهرساكنين الناتجين عن سلك نصف دائري مركزه O ونصف قطره R مشحون بكثافة خطية منتظمة و موجبة λ عند النقطة O. أستنتج قيمة الحقل في حالة حلقة دائرية

- أحسب الحقل الناشئ عن حلقة دائرية عند نقطة M تقع على محورها و تبعد عن O بالمسافة d، أرسم الدالة $E(d)$.



- التمرين 02: أربعة شحنات نقطية موضوعة على رؤوس مستطيل $ABCD$ ، تنشئ حقلا كهرساكنا خطوطه مبينة في الرسم :

أ- ما يمكن استنتاجه عن إشارة الشحنات، كيف نستطيع بيان أن الشحنات متساوية القيمة المطلقة.

ب- بين أن وتري المستطيل ليسا من خطوط الحقل.

ج- كيف يتغير الكمون على المحور $x'Ox$.

د- ما هي إشارة الكمون في كل من النقطتين M و N.

ه- هل توجد نقاط يكون فيها الكمون لامنته.

- التمرين 03: سلك على شكل قطعة مستقيمة طوله $2L$ مشحون بكثافة خطية موجبة و منتظمة λ (الشكل أ)

1- باستعمال خواص التناظر حدد اتجاه الحقل الكهرساكن

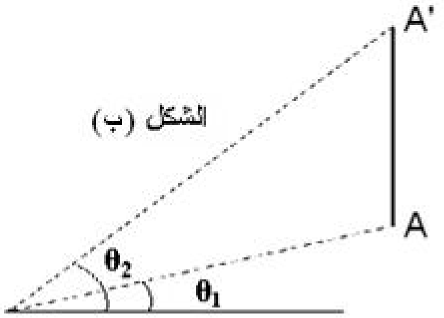
٢-أحسب الحقل الكهرساكن عند نقطة M تقع على محور التنظر عند المسافة x

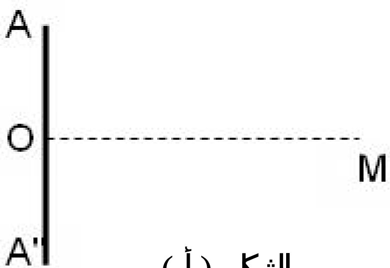
٣- أحسب كذلك الكمون الكهرساكن

٤- أستنتج الحقل الكهرساكن الناتج عن سلك لا منتهي.

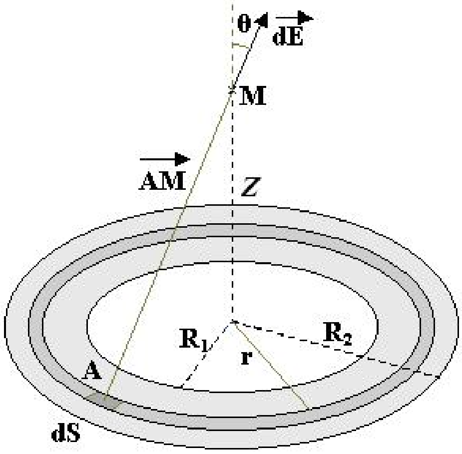
٥- هل يمكن استنتاج الكمون الكهرساكن في حالة سلك لامنتهي من النتيجة السابقة

٦- أعد الحساب من أجل الشكل (ب).





الشكل (أ)



- **التمرين 04:** أحسب الكمون الكهرساكن الناتج عن قرص أجوف مشحون بكثافة سطحية منتظمة وموجبة σ ، نصف قطره الداخلي R_1 و الخارجي R_2، عند النقطة M التي تقع فوق محوره و تبعد عن المركز O بالمسافة Z

- أحسب الشحنة الكلية للقرص
- باستعمل تناظر الجملة حدد اتجاه الحقل
- أحسب قيمة الحقل الكهرساكن بدلالة المسافة Z
- أحسب أيضا قيمة الكمون الكهرساكن
- أستنتج حالة المستوي اللامنتهي.
- هل يمكن استنتاج كمون المستوي من نتيجة القرص، برر الإجابة اعتمادا على خواص الكمون.

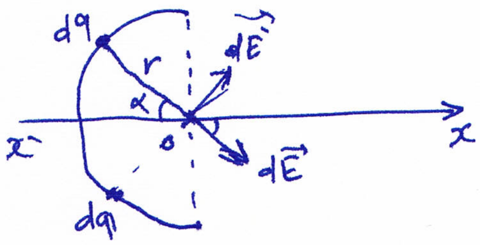
- **التمرين 05:** في حيز من الفضاء ينتشر حقل كهرساكن منتظم $\vec{E}_0$ شاقولي نحو الأعلى.

- أحسب تدفق الحقل $\vec{E}_0$ عبر مربع أفقي مساحته S_0 و ناظمه موجه نحو الأعلى، كيف يصبح التدفق عندما يكون المربع شاقوليا.
- في حالة مكعب قاعدته أفقية، أحسب تدفق الحقل عبر هذا السطح المغلق، ماذا تلاحظ

- **التمرين06:** عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه a ، ثبتنا ثلاثة شحنات نقطية موجبة Q وفي مركز المثلث وضعت شحنة سالبة $-Q$ ، المسافة بين الشحنتين Q و $-Q$ هي r

- أكتب a بدلالة r
- أستخرج عبارة الطاقة الكامنة الكهرساكنة لمجموع الشحنات بدلالة المتغير r
- حدد اتجاه القوي التي تؤثر بها الشحنات الموجبة في الشحنة السالبة، استنتج إشارة الطاقة
- ماذا يحدث لو نزعنا التثبيت عن الشحنات الموجبة

حل السلسلة 03: الحقل والكمون الكهرساكنين



- التمرين 01: نصف الحلقة يمالك محور تناظر $x'x$. لذلك فالحقل عند النقطة o يجب أن يقع على هذا المحور، لأن لكل عنصر dq نظير هو dq'. مجموع حقليهما يكون حسب $x'x$ المركبتان العموديتان على $x'x$ تنعدمان والمركبتان الموازيتان تتضاعفان، لذلك نحسب فقط المركبة الموازية للحقل ونكتب

$$d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u_r} \quad \text{ومنه} \quad dE_{/\!/} = dE_x = K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$$

لدينا: $r = R$ ، $dq = \lambda dl$ ، $dq = \lambda R\, d\alpha \Leftarrow$ $dE_x = \frac{K\lambda}{R}\cos\alpha\, d\alpha$

ومنه

$$E = E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{K\lambda}{R}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{K\lambda}{R}\left[\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

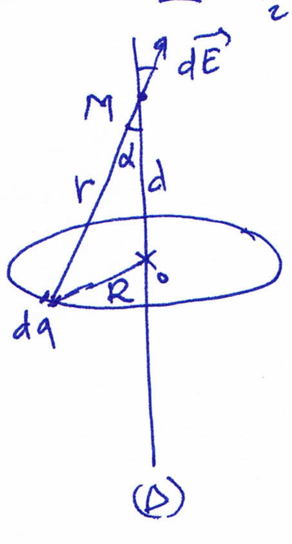
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}.2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

بالنسبة للكمون، لدينا:-

$$dV = K\frac{dq}{r} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C}} = K\frac{\lambda R\, d\alpha}{R}$$

$$\boxed{V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K\lambda\, d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda.\pi = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}}$$

- حالة الحلقة الكاملة



(Δ) يمثل محور تناظر للحلقة لذلك فالحقل عند M يكون محمولاً بهذا المحور، ومنه $\boxed{\vec{E}(M) = \vec{E}_{/\!/}(M)}$

لدينا الحقل العنصري:

$$d\vec{E}(M) = K\frac{dq}{r^2}\vec{u_r} \Leftarrow \boxed{dE_{/\!/} = K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha}$$

$$dq = \lambda dl \quad \text{و} \quad r^2 = R^2 + d^2 = ct$$

(2)

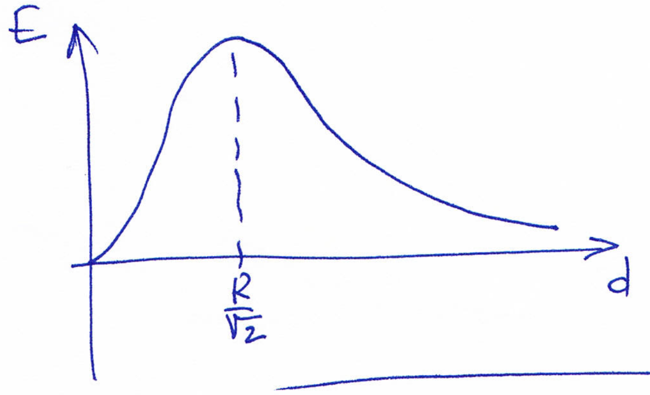
(قوس دائرة) $dl = R\,d\theta$ و $\cos\alpha = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}$ ، $\alpha = ct$

$$dE_{//} = K d \frac{\lambda\, dl}{(R^2+d^2)^{3/2}} = K d \frac{\lambda . R\, d\theta}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{E(M) = E_{//}(M) = K d \frac{\lambda R}{(R^2+d^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda d R}{(R^2+d^2)^{3/2}}}$$

لرسم $E(d)$ ، نحسب المشتقة فنجد : $E'(d) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{R^2 - 2d^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}$

وتكون القيمة العظمى عند $d = \frac{R}{\sqrt{2}}$



-التمرين 02 : -1حسب الرسم نلاحظ :

Q_A : شحنة موجبة (خطوط الحقل خارجة)

Q_D : " " (" " ")

Q_B : " سالبة (" " داخلة)

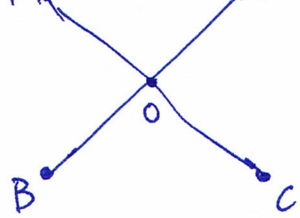
Q_C : " " (" " ")

لدينا مستوي تناظر عمودي على المحور $x'x$ يمر من M و N لذلك

$Q_B = Q_C$ و $Q_D = Q_A$

لدينا مستوي ضد تناظر عمودي يحتوي $x'x$ وبالتالي

$Q_C = -Q_D$ و $Q_B = -Q_A$



-(2- وترا المستطيل هما AC و DB ، يتقاطعان في النقطة O ، أي أن في النقطة O توجد شحنة وهذا غير صحيح لذلك لا يمكن وجود خطوط من هذا النوع

ج- المحور $x'ox$ محور تناظر يكون فيه الكمون:

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = 0 \quad \text{ومنه} \quad V_C = -V_D \quad \text{و} \quad V_A = -V_B$$

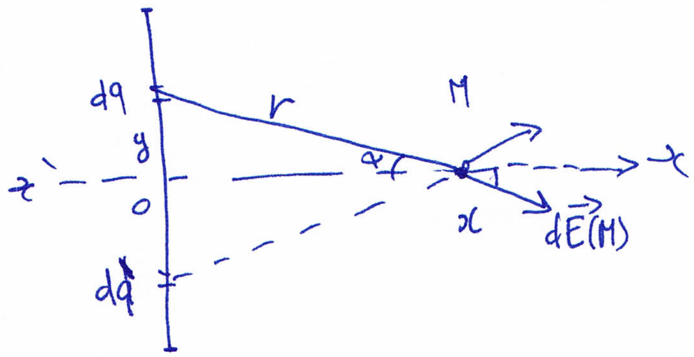
د- النقطة M من جهة الشحنات الموجبة أي $|V_A| > |V_B|$ و $V_D > |V_C|$
لذلك $V(M) > 0$

- النقطة N من جهة الشحنات السالبة لذلك نجد $V(N) < 0$

هـ- الكمون يكون لامنته عند الشحنات فقط أي $V(A) = V(D) = +\infty$

$V(B = V(C) = -\infty$

- التمرين 03:-



1- المحور $x'ox$ محور تناظر للقطعة
كل عنصر dq له نظير dq'، محصلتهما
تكون حسب المحور $x'ox$ و بالتالي
الحقل المحصل يكون محمولاً بهذا المحور

2- الحقل العنصري: $d\vec{E} = K \dfrac{dq}{r^2} \vec{u}_r$ مع $dq = \lambda dy$ و $r^2 = x^2 + y^2$

حسب التناظر نحسب فقط المركبة الموازية للمحور أي dE_x

$$dE_x = K \frac{dq}{r^2} \cos\alpha \Leftarrow \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad dE_x = K \frac{\lambda dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} . x$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \Leftarrow dy = x \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftarrow \qquad dE_x = K \lambda x \frac{d\alpha}{x^2} \cos\alpha$$

$$\Leftarrow \quad dE_x = \frac{K\lambda}{x} \cos\alpha \, d\alpha \Leftarrow \qquad E_x = \frac{K\lambda}{x} \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} \cos\alpha \, d\alpha$$

لدينا: $\sin\alpha_1 = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}} \Leftarrow$

$$\boxed{E_x = K \frac{\lambda}{x} \left[\sin\alpha\right]_{-\alpha_1}^{\alpha_1} = 2K \frac{\lambda}{x} \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}}}$$

3- حساب الكمون:

$$dV = K \frac{dq}{r} = K\lambda \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \Leftarrow \left\{ \text{نضع } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \text{ و } \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \right.$$

$$\left[dV = K\lambda \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta} (-2\, d\beta) \right]$$

④

ومنه
$$V = K\lambda \int_{+\beta_1}^{+\beta_2} \left[\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right](-d\beta) = K\lambda \Big[\ln|ctg\,\beta|\Big]_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$\Rightarrow \quad V = K\lambda \ln\left|\frac{ctg\,\beta_2}{ctg\,\beta_1}\right|$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{V = K\lambda \ln\left|\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}\right|}$$

4- إستنتاج حالة السلك اللامنتهي :

في هذه الحالة $L \to +\infty$ ومنه

$$\boxed{E_\infty = \lim_{L \to +\infty} E_x = 2K\frac{\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

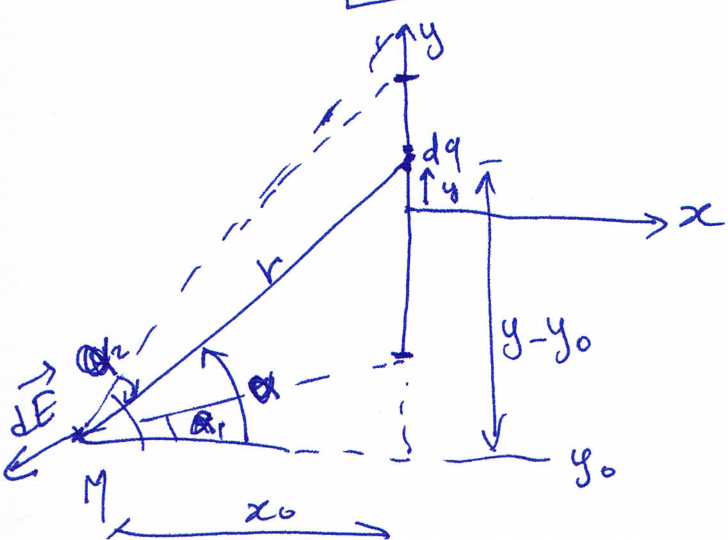
5- لا يمكن استنتاج الكمون للسلك اللامنتهي من النتيجة (3) لأن الشحنات تتواجد في (∞) وبالتالي الكمون غير معدوم في (∞) وهذا يجعل $C \neq 0$ وبالتالي النتيجة لا تتوافق مع فرضية السلك المنتهي

وبديل ذلك هو حساب $E_x = -\frac{dV}{dx}$ أي $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

$$\Leftarrow \quad V = -\int E_x\,dx \quad \Leftarrow \quad \boxed{V_\infty = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln|x| + C}$$

6- دراسة الحالة العامة :

النقطة $M(x_0, y_0)$ ، $dq = \lambda\,dy$



$$\begin{cases} d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u_r} \\ dE_x = -K\frac{\lambda\,dy}{r^2}\cos\alpha \\ dE_y = -K\frac{\lambda\,dy}{r^2}\sin\alpha \end{cases}$$

(5)

لدينا $r^2 = x_0^2 + (y-y_0)^2$ ، $\cos\alpha = \frac{x_0}{r}$ ، $\sin\alpha = \frac{y-y_0}{r}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-y_0}{x_0} \Rightarrow dy = \frac{x_0}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

نعوض كل شيء بدلالة الزاوية α. فنجد:

$$\begin{cases} dE_x = -K\lambda\left(\frac{\cos^2\alpha}{x_0^2}\right)\left(\frac{x_0}{\cos^2\alpha}\right)d\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow dE_x = -\frac{K\lambda}{x_0}\cos\alpha\, d\alpha \\ dE_y = -K\lambda\left(\frac{\cos^2\alpha}{x_0^2}\right)\left(\frac{x_0}{\cos^2\alpha}\right)d\alpha\, \sin\alpha \Rightarrow dE_y = -\frac{K\lambda}{x_0}\sin\alpha\, d\alpha \end{cases}$$

مع

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(-L-y_0)^2}} \quad , \quad \cos\alpha_2 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(L-y_0)^2}}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{-L-y_0}{\sqrt{x_0^2+(-L-y_0)^2}} \quad , \quad \sin\alpha_2 = \frac{L-y_0}{\sqrt{x_0^2+(L-y_0)^2}}$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{K\lambda}{x_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\, d\alpha \Rightarrow E_x = K\frac{\lambda}{x_0}\left[\frac{L+y_0}{\sqrt{x_0^2+(-L-y_0)^2}} - \frac{L-y_0}{\sqrt{x_0^2+(L-y_0)^2}}\right] \\ E_y = -K\frac{\lambda}{x_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha \Rightarrow E_y = K\frac{\lambda}{x_0}\left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(L-y_0)^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+(-L-y_0)^2}}\right] \end{cases}$$

بالنسبة للكمون:

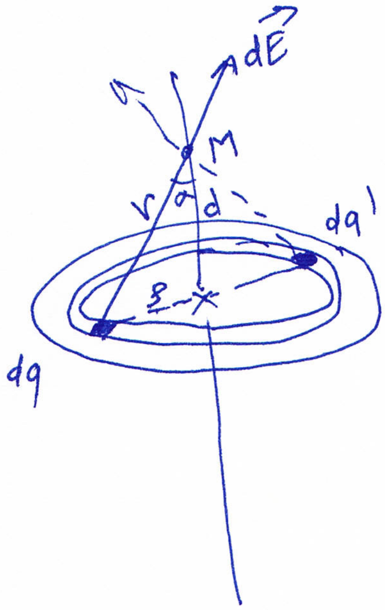
$$\begin{cases} dV = K\frac{\lambda\, dy}{r} + C \\ dV = K\lambda\left(\frac{x_0}{\cos^2\alpha}d\alpha\right)\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{x_0}\right) = K\lambda\cancel{x_0}\frac{d\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

بنفس الأسلوب نحسب الكمون

$$V = K\lambda\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right](-d\beta) = K\lambda\left[\ln|\operatorname{ctg}\beta|\right]_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = K\lambda\ln\left|\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_1}{2}\right)}\right|}$$

6



- التمرين 04 :-

$$dV = K\frac{dq}{r} + C \quad , \quad C = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{r}$$

لدينا $dq = \sigma ds = \sigma \rho d\rho d\theta$

و $r^2 = \rho^2 + d^2$ بالتالي :

$d = z$

$$dV = K\sigma \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+d^2}}$$

$$\Leftarrow \quad V = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} dV = K\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+d^2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\boxed{V = K\sigma \left[\sqrt{\rho^2+d^2}\right]_{R_1}^{R_2} \cdot 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+d^2} - \sqrt{R_1^2+d^2}\right]}$$

- حساب الشحنة : $dq = \sigma ds$

$$Q = \sigma \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma . 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{R_1}^{R_2} = \sigma\pi\left[R_2^2 - R_1^2\right]$$

- التوزيع يملك محور تناظر Oz ، لذلك بالنسبة لـ (M) يكون الحقل محمولاً بهذا المحور. نسقط الحقل العنصري على هذا المحور :

$E = E_z$ و $dE_z = K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$ $\Leftarrow$ $d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$

$dE_z = K\sigma d \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$ $\Leftarrow$ $dE_z = K\sigma \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+d^2)} \cdot \frac{d}{(\rho^2+d^2)^{1/2}}$ $\Leftarrow$

$$E_z = K\sigma d \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = K\sigma d . 2\pi . \left[-\frac{1}{(\rho^2+d^2)^{1/2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$E = E_z$ | $E_z = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R_1^2+d^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2+d^2)^{1/2}}\right]$ $\quad d \equiv z$

(7)

- حالة المستوي اللامنتهي أي $R_1 \to 0$ و $R_2 \to +\infty$

ومنه

$$\boxed{E = E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

- لا يمكن إستنتاج المستوي اللامنتهي من حالة القرص، عندما يتعلق الأمر بالكمون، لأن في حالة القرص لا توجد شحنات في (∞) في حين في حالة المستوي اللامنتهي توجد شحنات مما يطرح مشكلة الثابت $C \neq 0$، لكن يمكن إستنتاج الكمون من عبارة الحقل بإستعمال العلاقة

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{k} \qquad (z \equiv d)$$

$\Leftarrow$

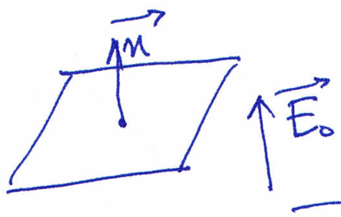
$$dV = -E\,dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz$$

$\Leftarrow$

$$\boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + k}$$

- التمرين 05 :-

$\vec{E_0} // \vec{n}$

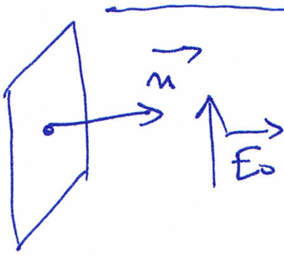


$\Leftarrow$

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{ds} = \vec{E}.ds.\vec{n}$$

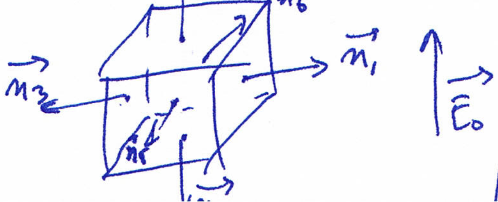
$$d\Phi = E_0.ds \Rightarrow \boxed{\Phi = \int_{(S)} E_0.ds = E_0.S}$$

- في الحالة الثانية



$$\boxed{\Phi = 0} \Leftarrow \vec{E_0}.\vec{n} = 0 \Leftarrow$$

- حالة المكعب



لدينا $\vec{E_0} \perp \vec{n_1}$ ، $\vec{n_3} \perp \vec{E_0}$ ، ،

فقط $\vec{E_0} // \vec{n_2}$ و $\vec{E_0} // \vec{n_4}$

و منه $\boxed{\Phi_t = \Phi_2 + \Phi_4 = E_0(S_2 - S_4) = 0}$

جامعة قسنطينة | مقياس فيزياء-2 (LMD)
قسم الفيزياء | السنة الجامعية 2008/2007

تمارين حول نظرية غوص

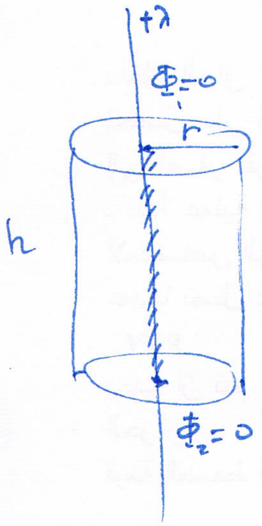
- التمرين 01 : سلك مستقيم شاقولي ولامنتهي مشحون بكثافة خطية منتظمة موجبة $+\lambda$.
- ناقش عناصر تناظر الجملة ، ثم استنتج طبيعة تناظرها ، ثم حدد سطح غوس المناسب.
- أستعمل نظرية غوس لحساب قيمة الحقل الكهرساكن $\vec{E}$ الناتج عن هذا التوزيع عند نقطة **M** تبعد بمسافة عمودية **x** عن السلك.
- استنتج قيمة الكمون الكهرساكن عند نفس النقطة.
نضيف سلكاً ثان مواز للأول على بعد **d** ، يملك نفس التوزيع $+\lambda$ ،
- أستنتج الحقل الكهرساكن المحصل في نقطة كيفية من مستوي السلكين ، متى يصبح معدوماً.
- بنفس الطريقة أوجد الكمون الكهرساكن المحصل.
- أعد نفس السؤال في حالة سلك ثان يملك كثافة خطية قيمتها $-\lambda$.

- التمرين 02 : سطح مستوي لامنتهٍ مشحون كهربائياً بكثافة سطحية منتظمة $+\sigma_1$.
- حدد عناصر التناظر لهذه الجملة و بين سطح غوس المناسب.
- باستعمال نظرية غوس، أحسب الحقل الكهرساكن الناتج عن هذا التوزيع في نقطة **M** تبعد عن المستوي بالمسافة العمودية **Z** .
- أستنتج الكمون الكهرساكن في تلك النقطة.
- أرسم طوبوغرافيا الحقل و الكمون من أجل **Z** موجبة، و **Z** سالبة.
نضيف سطحاً مماثلاً ثان، يحمل توزيعاً سطحياً منتظماً قيمته $+\sigma_2$.
- أحسب قيمة الحقل الكهرساكن المحصل عند النقطة **M** ، ناقش كل الحالات الممكنة.
- في حالة $\sigma_2 = -\sigma_1$ ، أوجد قيمة الحقل الكهرساكن في مختلف المجالات.
- ما قيمة فرق الكمون بين السطحين في هذه الحالة، أوجد علاقة بين هذه القيمة و كثافة التوزيع **σ** ، ثم استخرج السعة الكهربائية للجملة .

- التمرين 03: كرة مركزها **O** ، و نصف قطرها **R**، مشحونة بكثافة حجمية منتظمة و موجبة $+\rho$ ، باستعمال نظرية غوس أحسب :
- قيمة الحقل الكهرساكن الناتج عن هذا التوزيع في نقطة **M** تبعد عن المركز بالمسافة **r** أدرس كل مجال تغير **r**.
- أستخرج قيمة الكمون الكهرساكن داخل و خارج الكرة، ثم مثل تغيره بدلالة البعد **r**.
- أستخرج السعة الذاتية للكرة.
نأخذ هذه المرة كرتين لهما نفس المركز و نفس التوزيع ، الداخلية ممتلئة نصف قطرها R_1 والخارجية مجوفة نصفا قطريها على التوالي R_2 و R_3 . بنفس الطريقة السابقة، أحسب:
- الحقل و الكمون الناتجين في كل مجال من المجالات الثلاث.
- أرسم في مخططين منفصلين تغير الحقل و الكمون الكهربائيين بدلالة البعد عن المركز .
- أستخرج قيمة فرق الكمون بين الكرتين بدلالة كثافة التوزيع، و السعة الكهربائية لهذه المكثفة.
- أعد نفس الحساب السابق في حالة كثافة التوزيع للكرة الخارجية سالبة.

- التمرين 04 : أعد التمرين الأول باستبدال السلك بأسطوانة لامنتهية نصف قطرها **R** و تملك كثافة سطحية منتظمة $+\sigma$

نظرية غوس



التمرين 1: -

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E.S_\ell = E.2\pi r.\cancel{h} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

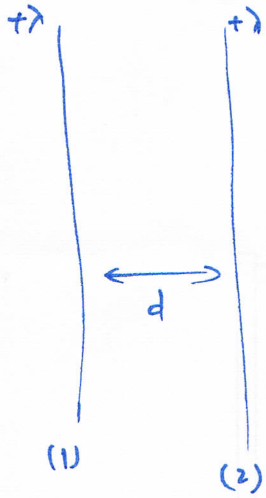
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \qquad r = x$$

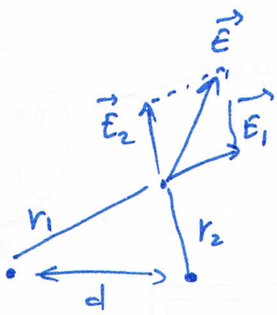
- $\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Leftarrow dV = -E.dr$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln|r| + c}$$

- حالة السلكين





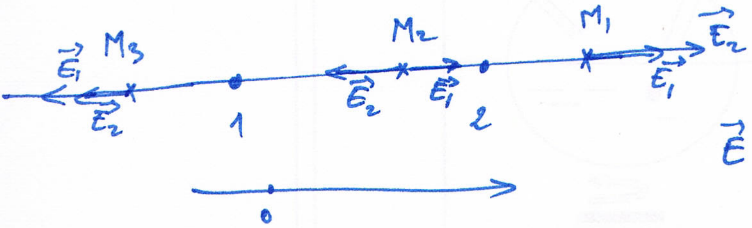
$$\vec{E_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u_{r_1}}}{r_1}$$

$$\vec{E_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u_{r_2}}}{r_2}$$

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

في الحالة العامة لا داعي لإجراء الحسابات

* في مستوى السلكين



M_1: $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2+d} + \frac{1}{r_2}\right)\vec{i}$

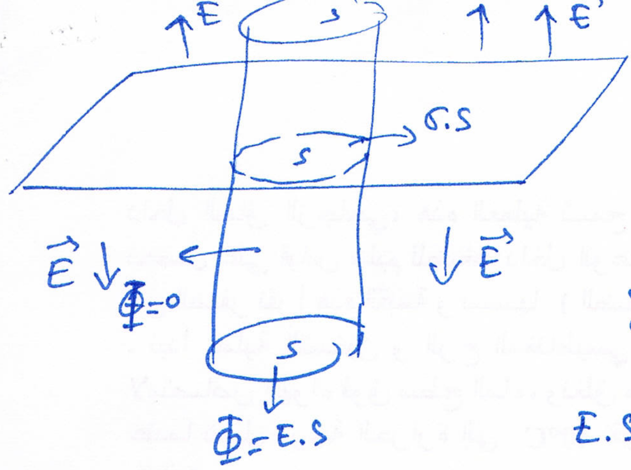
M_2: $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d-r_1}\right)\vec{i}$

M_3: $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1+d} + \frac{1}{r_1}\right)\vec{i}$

ينعدم $\vec{E}$ في M_2 عندما $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d-r_1} = 0 \Leftarrow r_1 = r_2 = \frac{d}{2}$

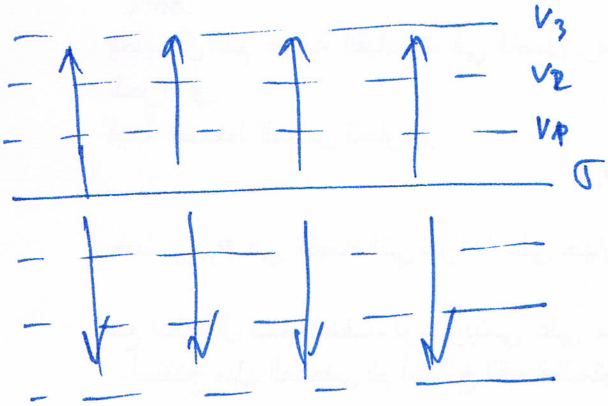
- الكمون الحاصل: نشتغل $V = \int -E\,dr + c$. عند النقاط M_1, M_2, M_3

التمرين 2 :: سطح غوص أسطوانه عمودية على المستوى :



$$\Phi_S(\vec E) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

$$E.S + E.S = \frac{\sigma_1 . S}{\varepsilon_0} . \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}}$$

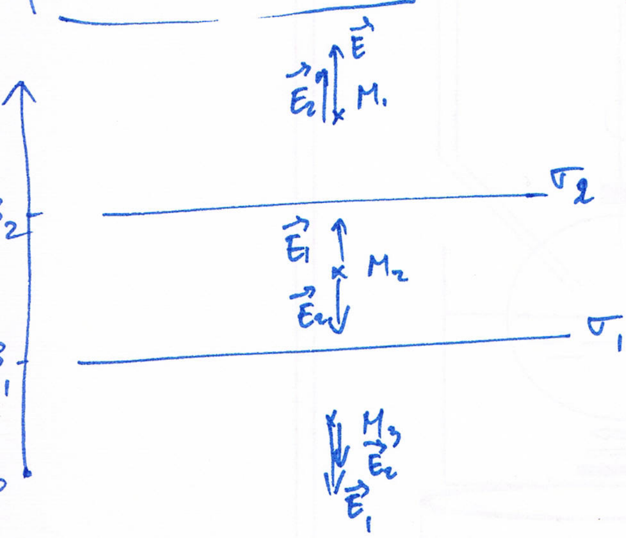


- $V = -\int E.\, dz + C$

* $z>0$: $V = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} z + c$

* $z<0$: $V = +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} z + c$

$$\boxed{V = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}|z| + C}$$



- حالة مستويين معاً

M_1 : $\vec E_1 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec k$

M_2 : $\vec E_2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec k$

M_3 : $\vec E_3 = -\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec k$

- حالة $\sigma_2 = -\sigma_1 \Leftarrow \vec E_1 = \vec E_3 = \vec 0$ ، $\boxed{\vec E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec k}$

- لدينا $dV = -E\,dz.$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dV = -\int_{z_1}^{z_2} E\,dz \Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_2 - z_1).$$

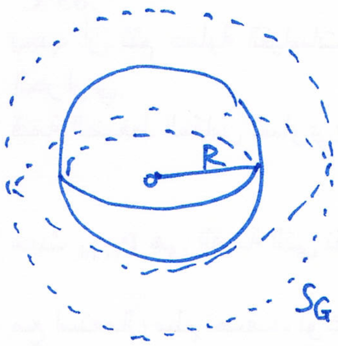
أو $(V_1 - V_2) = \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\Delta z)$

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot e \quad , \quad e = \Delta z$$

مع $\sigma = \frac{Q}{S} \Leftarrow \Delta V = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \cdot e = \frac{Q}{C}$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{e}}$$

التمرين الثالث :-



حسب قوس : $\oint_{S_G} (E) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

1: داخل الكرة : $(r<R)$

$$Q_{int} = \rho \cdot v_{S_G} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$$

ومنه

$$\oint_{S_G} (E) = 4\pi r^2 \cdot E = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \cdot \rho$$

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

2: خارج الكرة : $(r>R)$

$$Q_{int} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$$

ومنه

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R^3 \rho$$

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}}$$

-حساب الكمون:

$$dV = -E \cdot dr$$

* : $(r<R)$

$$V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot r\, dr = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\rho r^2 + C_1$$

$$\boxed{V_1 = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\rho r^2 + C_1}$$

$$V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}\, dr \qquad (r > R)$$ *4

$$\boxed{V_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r} + C_2}$$

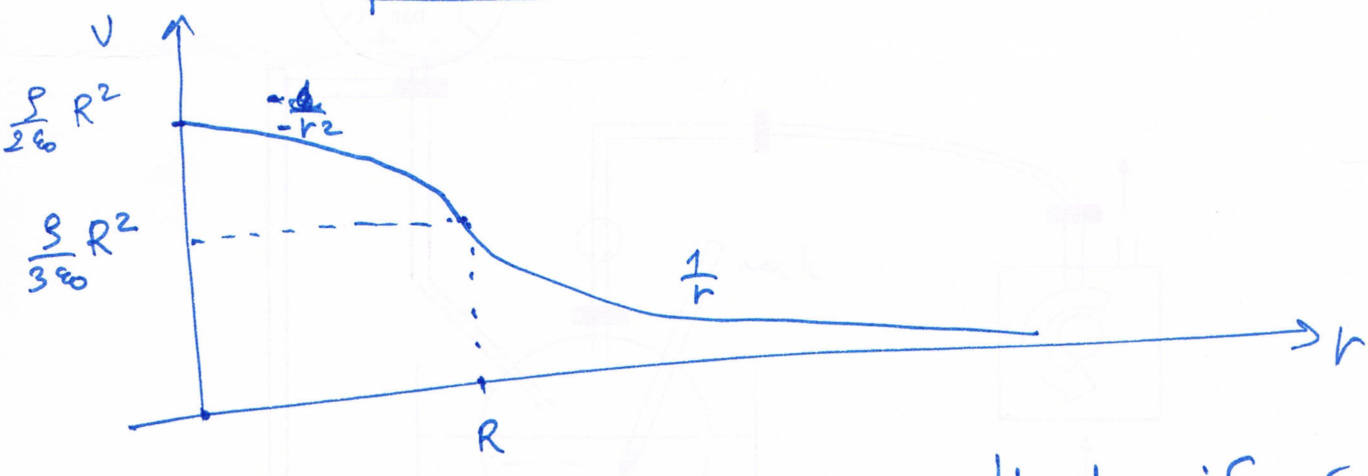
نعين C_2 على أساس V_2 في ∞ معدوم ومنه

$$\boxed{C_2 = 0}$$

ونعين C_1 على أساس $V_2 = V_1$ عندما $r = R$ (V مستمر)

$$V_1(R) = V_2(R) \Longrightarrow \frac{-1}{6\varepsilon_0} \rho R^2 + C_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2}$$



تعيين C: لدينا

$$Q = C \cdot V_2(R)$$

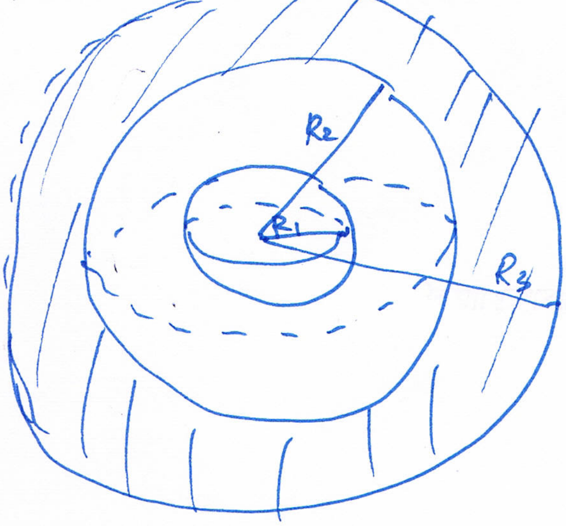
$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \Longrightarrow \rho = \frac{3}{4} \frac{Q}{\pi R^3}$$

$$V_2(R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{R} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot R^2$$

$$V_2(R) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{3}{4} \frac{Q}{\pi R^3} \cdot R^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

⑤ حالة كرتين متمركزتين:



لدينا أربعة حالات مختلفة

$R_2 < R < R_3$ ، $R_1 < r < R_2$ ، $r < R_1$

$r > R_3$

*(1 : $r < R_1$

$$Q_{int} = \rho . v_{SG}$$

$$Q_{int} = \rho . \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Phi(E) = 4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

*(2 : $R_1 < r < R_2$

$$Q_{int} = \rho . \frac{4}{3}\pi R_1^3$$ و منه

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} . \frac{R_1^3}{r^2}}$$

*(3 $R_2 < r < R_3$

$$Q_{int} = Q_1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3\right)$$

$$Q_{int} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \frac{4}{3}\pi\left[R_1^3 + r^3 - R_2^3\right] = \frac{4}{3}\pi\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left[R_1^3 - R_2^3 + r^3\right]$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 . \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^3}{r^2} - \frac{R_2^3}{r^2} + r\right]}$$

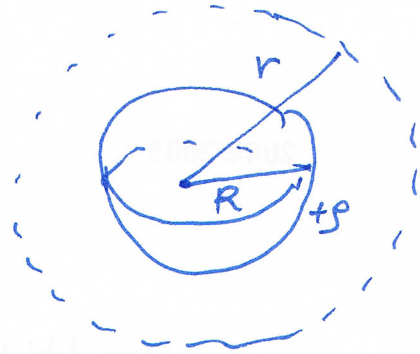
*(4 : $r > R_3$

$$Q_{int} = Q_1 + Q_2$$

$$= \frac{4}{3}\pi \rho \left(R_1^3 + R_3^3 - R_2^3\right)$$

$$\boxed{E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\pi\varepsilon_0}\left(R_1^3 + R_3^3 - R_2^3\right)\frac{1}{r^2}}$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$



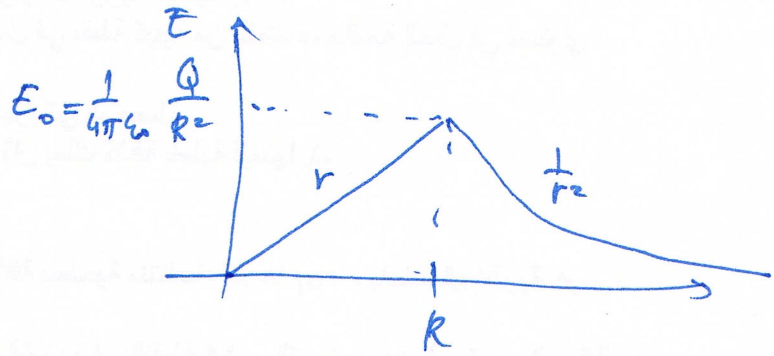
$$\Phi_S = E.S = E.\tfrac{4}{3}\pi r^2$$

$r < R.$

$$Q_{int} = \rho.\frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\Rightarrow E.\cancel{4\pi r^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.\frac{4}{3}\pi r^{\cancel{3}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r.}$$



$r > R$: $Q_{int} = Q.$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$r < R$:

$$dV = -E\,dr = -\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r\,dr \Rightarrow V_1 = -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

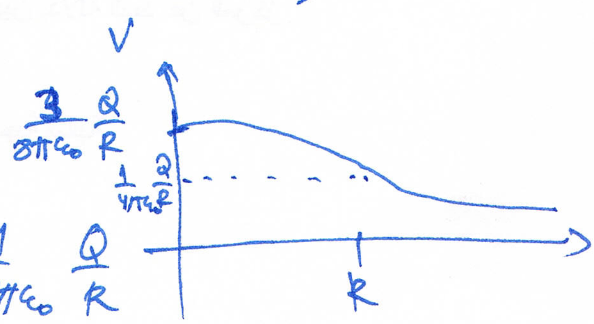
$r > R$:

$$dV = -E\,dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr \Rightarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + C_2$$

$$\underset{r\to\infty}{V_2 = 0} \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

$$r \to R: \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon} R^2 + C_1 \qquad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

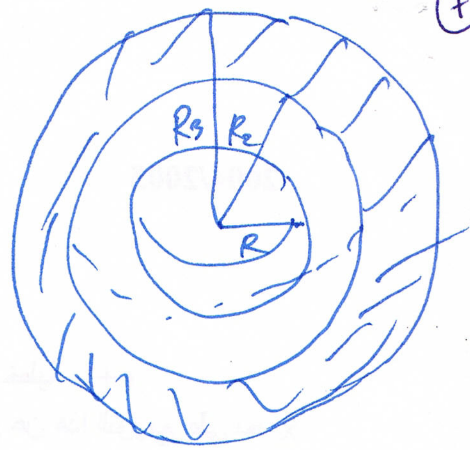
$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.R^2 + C_1$$



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$\boxed{V_1 = -\frac{1}{6}\frac{\rho}{\varepsilon} r^2 + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}}$$

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{Q}{C} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$



$r < R_1$: $\quad E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{int}}{r^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r.$

$R_1 < r < R_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

$R_2 < r < R_3 \Rightarrow E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{int}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_{2int}}{r^2}$

$$Q_{int_2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_2}^{r} \rho . r^2 \sin\theta \, d\theta . d\varphi = \int_{R_2}^{r} 4\pi\rho r^2 dr = \frac{4}{3}\pi.(r^3 - R_2^3)\rho$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q_1 + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_2^3)}{r^2}$$

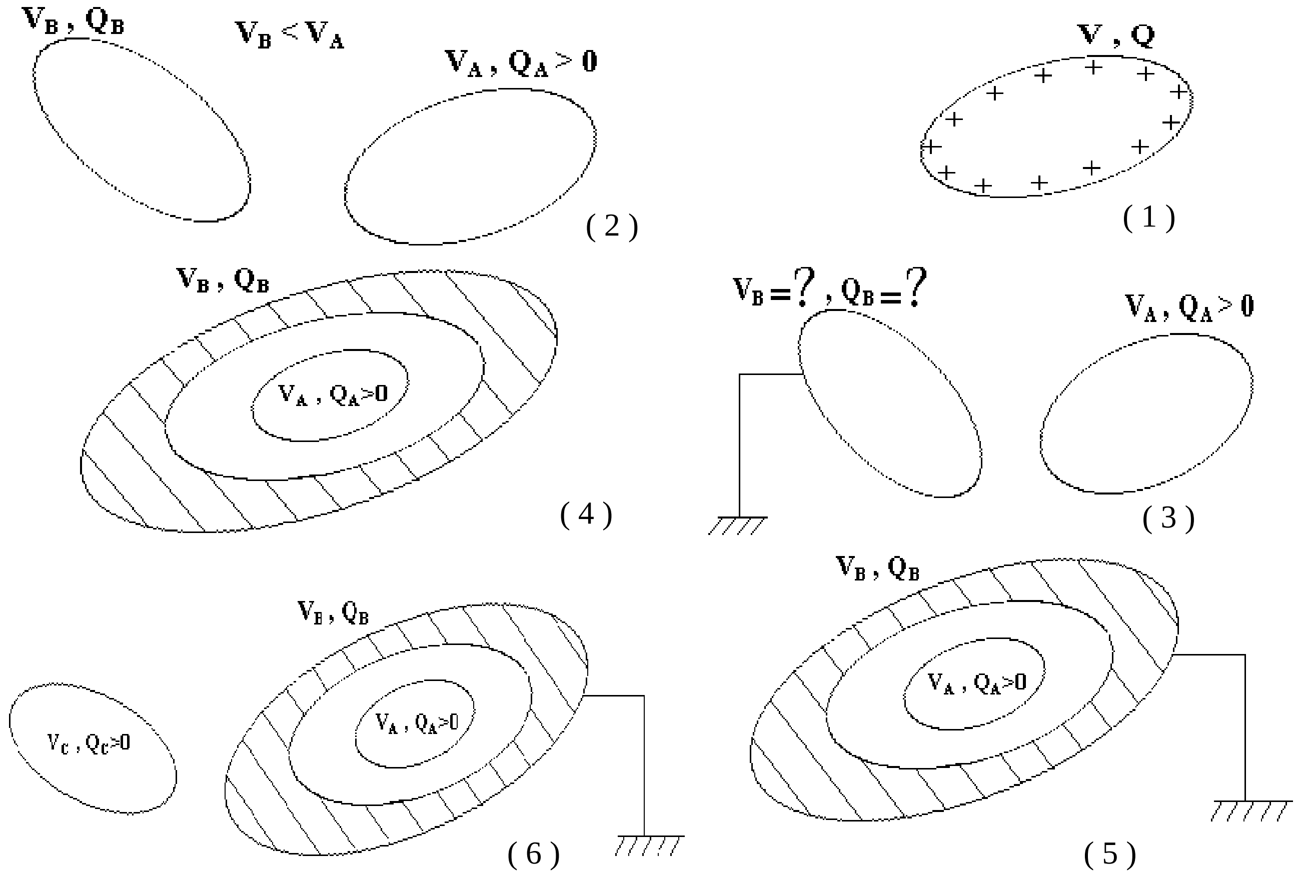
$r > R_3 \Rightarrow E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$

جامعة قسنطينة
قسم الفيزياء

مقياس فيزياء-2 (LMD)
السنة الجامعية 2009/2008

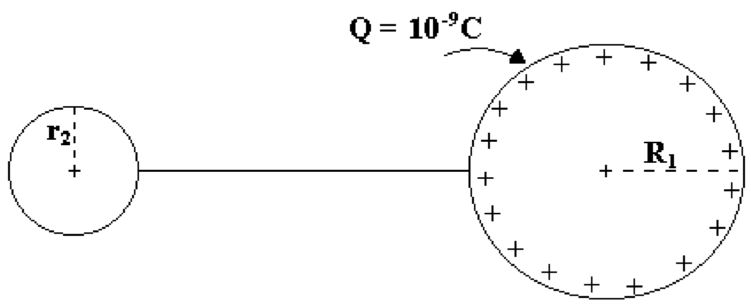
السلسلة رقم ٠٤ : الموصلات في حالة توازن كهروساكن

- التمرين 01 : من أجل الحالات الآتية: بين نوعية التأثير الكهرساكن، و حدد نوعية الشحنات الكهربائية التي تظهر على سطحي الموصلين ، ثم مثل طبوغرافيا الحقل.



- التمرين 02 : كرتان معدنيتان: الأولى نصف قطرها $R_1 = 1m$ تحمل شحنة $Q = 10^{-9}C$، و الثانية نصف قطرها $r_2 = 0.3m$ غير مشحونة، موصلتان بسلك معدني مقطعه مهمل ، بحيث تكون المسافة بينهما كبيرة حتى نستطيع إهمال التأثير المتبادل:

- إذا افترضنا أن جزءا من الشحنة انتقل إلى الكرة الثانية، أحسب كمون كل كرة، ثم أستنتج كمون الجملة
- أحسب كثافة التوزيع السطحي لكل من الكرتين، ثم أستنتج شدة الحقل الكهرساكن عند السطحين، ثم بين أن كلا من كثافة التوزيع و شدة الحقل تتناسب عكسا مع مربع نصف القطر.
- أحسب الطاقة الكهرساكنة للجملة قبل و بعد التوصيل، ناقش ذلك.

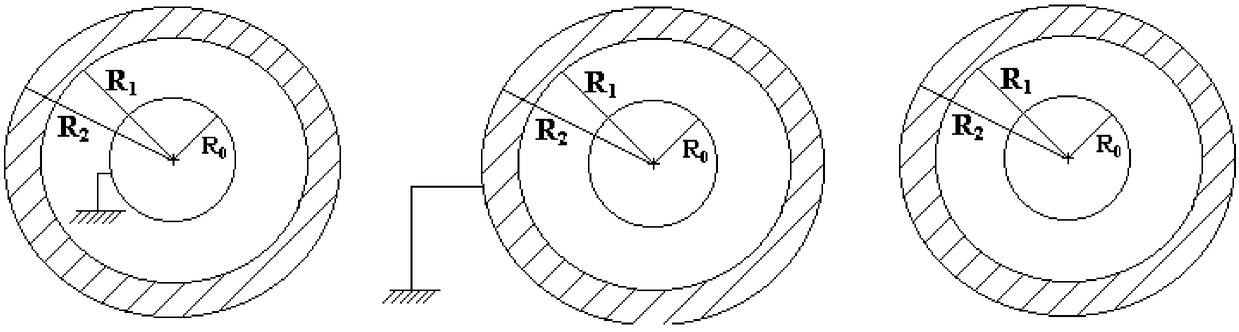


- **التمرين 03** : كرتان معدنيتان مركزهما O ، الداخلية S_0 نصف قطرها $R_0 = 10\ Cm$ ، وضعت عند الكمون $V_0 = 18\ KV$ بالنسبة للأرض، و الخارجية S جوفاء نصفا قطريها داخلي $R_1 = 20\ Cm$ و خارجي $R_2 = 22\ Cm$:

1- في البداية كانت الكرة S محايدة و معزولة: أستخرج عبارة كموني الكرتين عند التوازن الكهربائي.
ثم مثل تغير الكمون $V(M)$ بدلالة البعد عن المركز r ، في كل المناطق.

2- نوصل الكرة الخارجية S بالأرض، عين كمون الكرة الداخلية S_0 بدلالة V_0 ، R_0 و R_1.

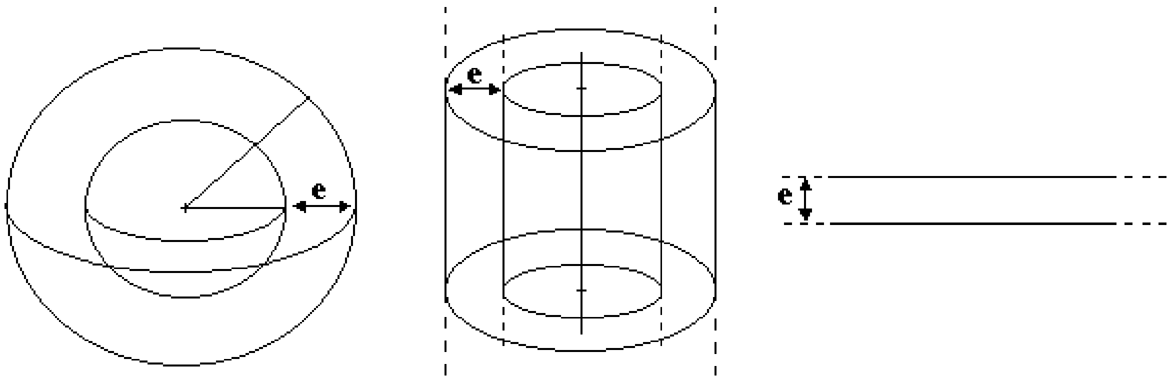
3- (المنزل) نعزل الكرة S مرة ثانية ، و نوصل الكرة S_0 بالأرض: أحسب الشحنة الكهربائية لهذه الأخيرة، و استنتج كمون الكرة S بدلالة نفس المعطيات.



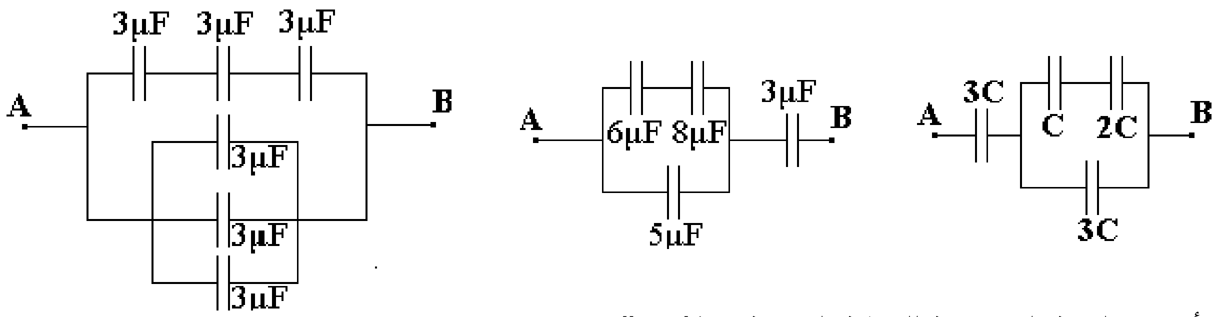
(3) (٢) (1)

- **التمرين 04** : اعتمادا على نتائج السلسلة السابقة(غوس)، أحسب السعة الكهربائية للمكثفات التالية :

- المكثفة المستوية اللامنتهية ذات السمك e و السطح S.(المنزل)
- المكثفة الكروية ذات نصفي القطرين $R_1 = R$ و $R_2 = R+e$
- المكثفة الأسطوانية اللامنتهية ذات نصفي القطرين $R_1 = R$ و $R_2 = R+e$ و الارتفاع h



- **التمرين 05** : (المنزل) لتكن التركيبات التالية لمجموعة المكثفات :

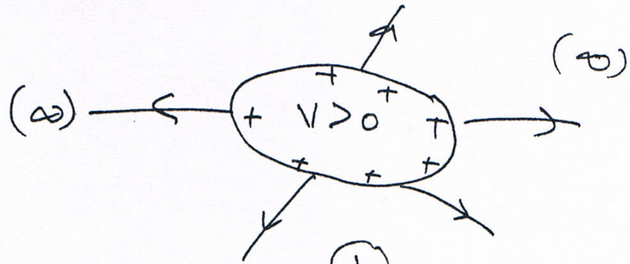


1- أحسب السعة الكهربائية للمكثفة المكافئة في كل حالة

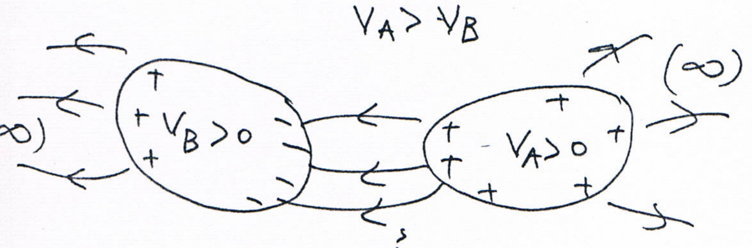
2- نقوم بتطبيق فرق كمون $\Delta V = 2000V$ بين A و B، أحسب الشحنات المثبتة فوق كل مكثفة، و فرق الكمون بين طرفي كل منها.

حل سلسلة الموصلات

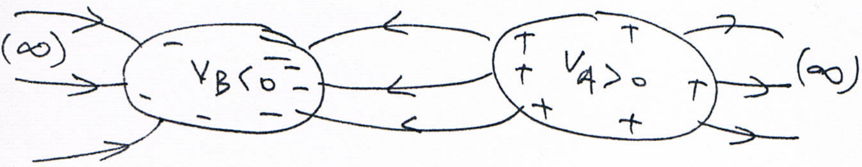
التمرين 01 :



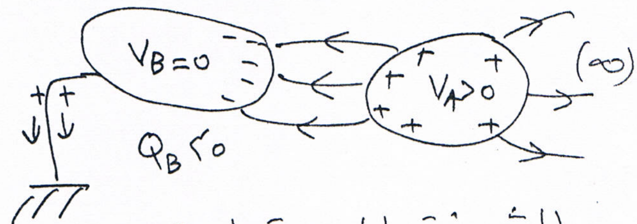
①



أو

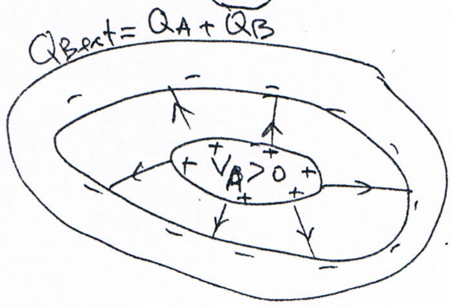


②



الشحنة الموجبة لـ B تنزل إلى الأرض، لا توجد خطوط تذهب من B إلى (∞)

③



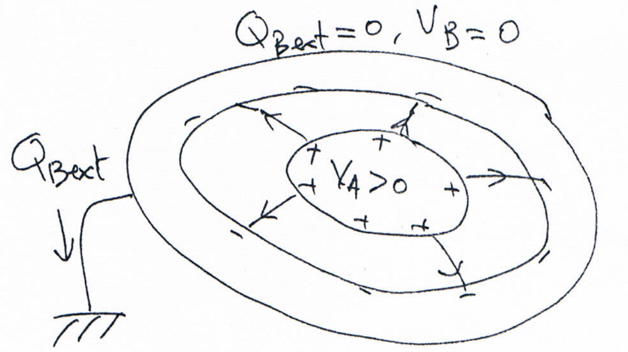
تأثير كلي بين A و B ⇐ $Q_{Bint} = -Q_A$

و $Q_{Bext} = Q_A + Q_B$ ⇐

* $Q_{Bext} > 0$ ⇐ خطوط الحقل تخرج من (B) ⇐ (∞)

* $Q_{Bext} < 0$ ⇐ خطوط تأتي من (∞) ⇐ (B)

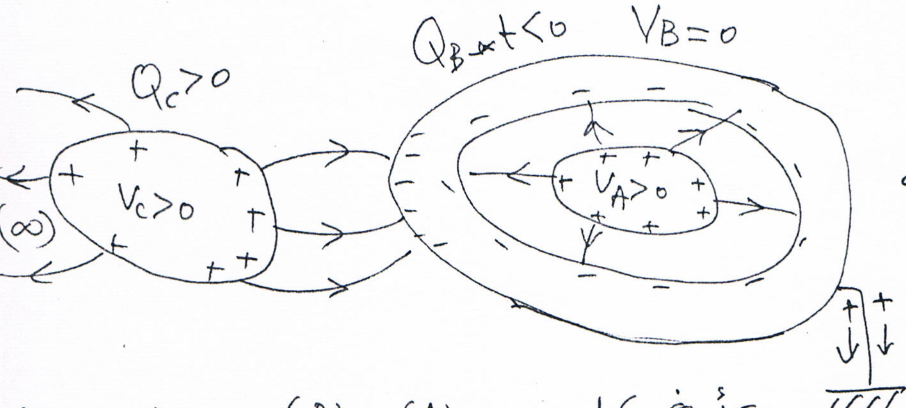
④



Q_{B-ext} تنزل إلى الأرض ولا خطوط بين (B) و (∞)

تأثير كلي بين (A) و (B)

$Q_{Bint} = -Q_A$

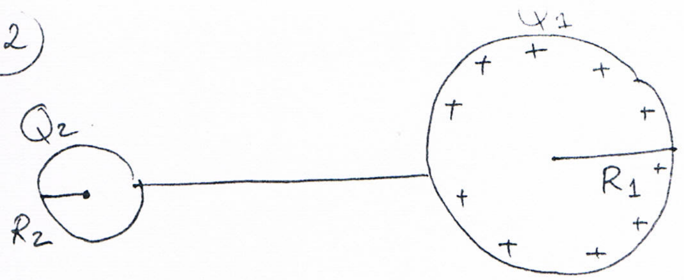


* تأثير كلي بين (A) و (B) ⇐ $Q_{Bint} = -Q_A$

* تأثير جزئي بين (C) و (B)، تظهر شحنات سالبة بالقرب من (C)

* الشحنات الموجبة تنزل إلى الأرض

(2)



- التمرين 02 : التوصيل يؤدي إلى إنتقال جزء من الشحنة إلى الكرة (2)، عند التوازن.

لدينا

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (1)$$ مع

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

و $V = V_1 = V_2$ نفس الناقل

بحل المعادلتين نجد أن:

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}Q \quad \text{و} \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}Q$$

و

$$V = V_1 = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}Q\right)\cdot\frac{1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1+R_2}$$

- حساب الحقل وكثافة التوزيع:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \quad \text{و} \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \,,\; E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

نعوض:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_1+R_2)} \,,\; \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_1+R_2)} \Leftarrow E_1 \text{ و } E_2$$

- حساب الطاقة الكامنة الكهروساكنة:

* قبل التوصيل، الناقل (2) فقط مشحون

$$E_p = E_{p_2} = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \,,\quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0R_2 \,,\; Q_2 = Q$$

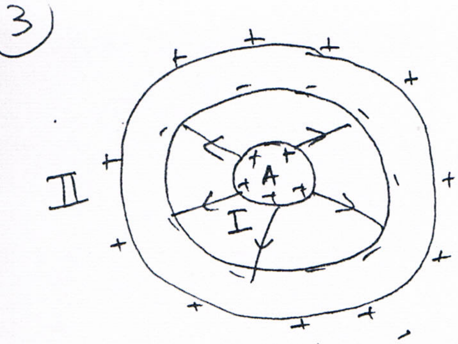
$$\Leftarrow E_p = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R_2}$$

* بعد التوصيل، الناقلان (1) و (2) مشحونان لذلك $E'_p = E'_{p_1} + E'_{p_2}$

$$E'_p = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \qquad C_1 = 4\pi\varepsilon_0R_1$$

$$E'_p = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R_2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}Q\right)^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0R_1}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}Q\right)^2\right] = \frac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)} < E_p$$

الطاقة تناقصت لأن الجملة هي التي بذلت العمل لنقل الشحنات



- التمرين 03 :- (1) التأثير كلي بين الكرتين

$Q_B = 0$ ، $Q_{Bext} = Q_A + Q_B$ و $Q_{Bint} = -Q_A$ ⇐

$Q_{Bext} = Q_A$ ⇐

- حساب الكمون :- باستعمال نظرية قوس نجد أن الحقل في :

* المنطقة (II) $E_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r^2} \Rightarrow V_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r} + C_{II}$ ، $C_{II} = 0$

عند سطح الكرة (R_2) نجد $V_{II} = V(R_2) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ وهو كمون الكرة الخارجية

* المنطقة (I) $E_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r^2} \Rightarrow V_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r} + C_I$

تعين الثابت C_I من المعادلة :

$$V_{II}(R_2) = V_I(R_1)$$

خارج الكرة   داخل الكرة

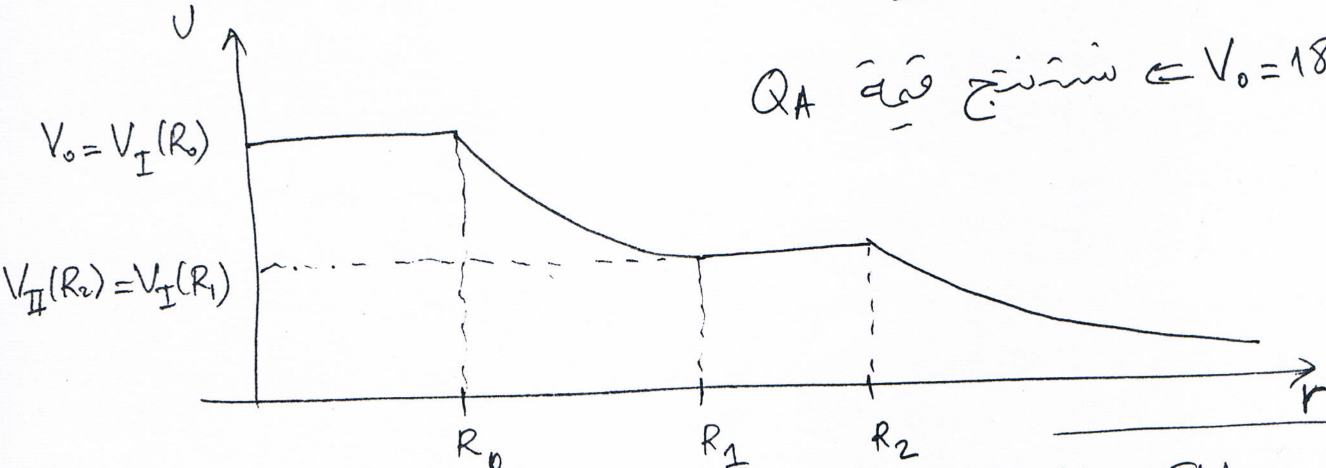
من المعادلة نحصل على

$$C_I = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

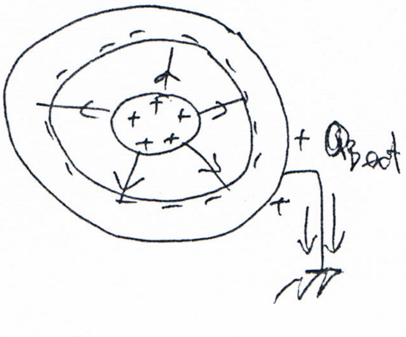
عند سطح الكرة الداخلية نجد $V_0 = V(R_0)$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_0} + C_I = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

$V_0 = 18\,KV$ ⇐ نستنتج قيمة Q_A



(2) نوصل الكرة الخارجية بالأرض : يصبح $V_{II}(R_2) = 0$ و كل الشحنة Q_{Bext} تذهب إلى الأرض



- حساب كمون الكرة الداخلية :-

كمون الكرة الخارجية $V_{II}(R_2) = V_I(R_1) = 0$

وكمون الكرة الداخلية نحصل عليه من العلاقة :

$$V'_I(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r} + C'_I$$

يجب تعيين C'_I من العلاقة

$$V_{II}(R_2) = V_I(R_1)$$

$$C'_I = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_1} \Leftarrow 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_1} + C'_I \Leftarrow$$

عند سطح الكرة (R_0) نجد :

$$V'_I(R_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_0} + C'_I$$

$$V'_0 = V_I(R_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{R_1} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right]$$

- التمرين ٠٧ :- نأخذ المكثفة الكروية ، ونحسب الحقل بين الناقلين

باستعمال نظرية ڤوس نجد :

$$\Phi(E) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

نحسب تغير الكمون بين $R_1 \Leftarrow R_2 \Leftarrow$

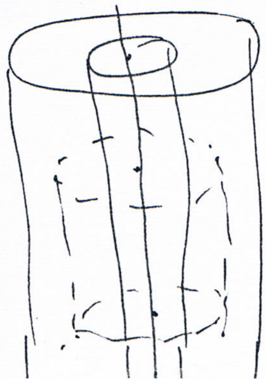
$$dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -E\,dr.$$

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] = V(R_2) - V(R_1) = -U.$$

$$Q = C.U = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)U \Longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

$$R_2 = R_1 + e \Longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1(R_1+e)}{e} \simeq \frac{\varepsilon_0}{e}(4\pi R_1^2) \simeq \varepsilon_0\frac{S}{e}$$

- بالنسبة للمكثفة الأسطوانية ، نستعمل كذلك قانون ڤوس.



نجد أن :

$$E \times 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.2\pi R_1 h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h r} \quad \Leftarrow$$

بالتكامل نجد

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\log\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\log\frac{R_2}{R_1}}$$